

Mit freundlicher Genehmigung der Studienverantwortlichen, bereitgestellt vom Deutschen Institut für Internationale Pädagogische Forschung über das Forschungsdatenzentrum Bildung ([www.forschungsdaten-bildung.de](http://www.forschungsdaten-bildung.de)) im Fachportal Pädagogik ([www.fachportal-paedagogik.de](http://www.fachportal-paedagogik.de)).

## Lektionsbeschreibung aus der Studie „Pythagoras: Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“

Download Lektionsbeschreibung [P-1120] Unterrichtsvideo

Klasse [A13] zur Unterrichtseinheit [Satz des Pythagoras] Lektion [1, 2, 3] in der Unterrichtssituation [Klassenunterricht]

### Hinweis zum Urheberrecht

Diese Lektionsbeschreibung unterliegt dem Urheberrecht. Mit seiner Verwendung erkennen Sie dies an und verpflichten sich, das Urheberrecht zu wahren, indem Sie den/die Urheber/in entsprechend den wissenschaftlichen Gepflogenheiten nennen bzw. die Quelle zitieren, auf die Sie sich beziehen.

Die Zitation sollte folgende Angaben enthalten:

- (1) Urheber der Studie / der Daten und Materialien / des Erhebungsinstruments
- (2) Titel der Studie
- (3) Erhebungszeitraum der Daten / Laufzeit der Studie
- (4) Datentyp (Video- / Audiodatei / Transkript / Lektionsbeschreibung / Basiscodierung)
- (5) Anbieter (Forschungsdatenzentrum Bildung am DIPF, Frankfurt)
- (6) Datum der Bereitstellung
- (7) Version – sofern vorhanden
- (8) Persistent Identifier (DOI oder URN) – sofern vorhanden

Urheber der Studie sind: Prof. Dr. Eckhard Klieme, Prof. Dr. Kurt Reusser, PD Dr. Christine Pauli. Zitationsrelevante Angaben, studienbezogene Publikationen sowie weitere verfügbare Materialien sind in der Übersicht zur Studie zu finden:

[http://www.fachportal-paedagogik.de/forschungsdaten\\_bildung/studie.php?studien\\_id=1](http://www.fachportal-paedagogik.de/forschungsdaten_bildung/studie.php?studien_id=1)

### Kontakt

Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF)  
Forschungsdatenzentrum Bildung  
Schloßstraße 29  
D-60486 Frankfurt am Main

[forschungsdaten-bildung@dipf.de](mailto:forschungsdaten-bildung@dipf.de)

## Lektionsbeschreibung 1120-1

Zu Beginn dieser Stunde stehen die Schülerinnen und Schüler auf, um die Lehrperson zu begrüßen. Danach lässt die Lehrperson ein Tonband laufen, auf dem sich Pythagoras persönlich vorstellt und seine Erkenntnisse erklärt. Danach bittet die Lehrperson die Klasse, eine Skizze mit der Aussage des Pythagoras an die Wandtafel zu machen. Eine Schülerin skizziert darauf ein rechtwinkliges Dreieck an die Wandtafel, bezeichnet Katheten und Hypotenuse und ergänzt die Skizze des rechtwinkligen Dreiecks zur grafischen Darstellung des Satzes von Pythagoras, indem sie die Flächenquadrate über den Seiten zeichnet. **Sie zeigt dabei, dass die kleinen Quadrate zusammen, das grosse Quadrat ergeben.**

Die Lehrperson beschriftet die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks und die Seiten der Flächenquadrate mit a, b und c und die Flächenquadrate mit A1, A2 und A3. Darauf werden die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks von einem Schüler mit Hypotenuse und Katheten angeschrieben. Die Lehrperson fordert darauf die Schülerinnen und Schüler auf, nun den Satz des Pythagoras mit den, an die Wandtafel geschriebenen Bezeichnungen zu formulieren. Ein Schüler schreibt unter die grafische Darstellung  $A1 + A2 = A3$ . Mit der Aufforderung der Lehrperson den Satz des Pythagoras mit den Bezeichnungen der Seiten anzuschreiben, notiert ein Schüler die nicht ganz korrekte Formel an die Wandtafel, die von der Klasse zu  $a^2 + b^2 = c^2$  korrigiert wird.

Danach erzählt die Lehrperson Geschichtliches zu Beweisführungen des Satzes und über die Wichtigkeit u. Wirkung von Pythagoras bis hin zur Briefmarke und zur Werbung von Rittersport in unserer Zeit. Dazu befestigt die Lehrperson ein Plakat, auf dem der Satz des Pythagoras mit Rittersportschokolade dargestellt ist. In der Folge leitet die Lehrperson zum Zerlegungsbeweis über. Dazu leitet sie die Schülerinnen und Schüler an, aus zehn Figuren (Puzzleteile) und einem zusätzlichen rechtwinkligen Dreieck, die grafische Darstellung des Satzes von Pythagoras nachzubilden. Diese Arbeitsphase ist die Grundlage, für die Beweisführung in der zweiten Lektion. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten dabei alleine. Der Arbeitsinhalt baut auf bereits bekanntem Wissen auf. Die Schülerarbeitsphase wird nach einer Weile von der Lehrperson unterbrochen und ein Schüler zeigt die Puzzlekombination am Hellraumprojektor vor. An dieser Darstellung können sich die anderen Schülerinnen und Schüler orientieren. Ein zweiter Schüler zeichnet zur visuellen Unterstützung die Linien der Puzzleteile auf den Katheten- und dem Hypotenusenquadrat, einer vorgefertigten Skizze an der Wandtafel ein.

Darauf werden die alten Puzzleteile eingesammelt und neue verteilt. Die Lehrperson erteilt einen neuen Auftrag an die Klasse. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler das Hypotenusen- und die Kathetenquadrate mit anderen Puzzleteilen zusammensetzen, um die grafische Darstellung des Satzes von Pythagoras zu bilden. Auch diese Arbeitsphase ist die Grundlage für die Beweisführung in der zweiten Lektion. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten den Auftrag alleine und der Arbeitsinhalt baut auf bereits bekanntem Wissen auf. Zur Kontrolle werden danach im öffentlichen Unterricht die Katheten- und Hypotenusenquadrate auf dem Hellraumprojektor (mit den Puzzleteilen) hingelegt. Dabei lösen sich verschiedene Schülerinnen und Schüler ab. Zum Schluss der Stunde überträgt ein Schüler zur visuellen Unterstützung die Linien der Puzzleteile auf eine zweite grafische Darstellung an der Wandtafel (Vgl. Vorgehen beim ersten Mal).

## Lektionsbeschreibung P-1120-2

Zu Beginn dieser Stunde versorgen die Schülerinnen und Schüler die grünen Puzzleteile in ihre Umschläge und ein Schüler sammelt sie ein. An der Wandtafel sind die zwei grafischen Darstellungen des Satzes von Pythagoras mit den Einteilungen der Puzzleteile gezeichnet. Sie wurden letzte Stunde erarbeitet und gelten als Grundlage zur Beweisführung des Zerlegungsbeweises. Nun machen die Schülerinnen und Schüler in einer öffentlichen Phase mehrere Vorschläge, wie anhand dieser Darstellungen zu beweisen wäre, dass  $a^2 + b^2 = c^2$  ist. Dabei zeigt ein Schüler an der Wandtafel, dass sowohl die Einzelteile von  $a^2$ , als auch  $b^2$  in Puzzleteilen von  $c^2$  enthalten sind. Danach werden Drehmöglichkeiten um einen Drehpunkt und das Spiegeln als Beweisidee genannt. Danach nennt die Klasse auf das Insistieren der Lehrperson hin, das Verschieben als Beweismöglichkeit. Nun werden die kongruenten Puzzleteile von  $a^2$ ,  $b^2$  und  $c^2$  mit jeweils derselben Farbe an der Wandtafel angemalt. In der Folge will die Lehrperson wissen, was nun entscheidend für diese Beweisführung des Satzes von Pythagoras ist. Ein Schüler nennt darauf, die Kongruenz von den Einzelteilen der Hypotenusen- und Kathetenquadrate.

In der Folge gibt die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern den Auftrag, einen weiteren Beweis zu legen. Ein Schüler verteilt neue Umschläge. In jedem Umschlag stecken Puzzleteile für den Ergänzungsbeweis. Die Schülerinnen und Schüler haben den Auftrag, zwei grosse, deckungsgleiche Quadrate zu legen. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Einzelarbeit. Die Arbeit baut auf dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler auf. Während dieser Schülerarbeitsphase zeichnet die Lehrperson zwei kongruente Quadrate an die Wandtafel, welche in der Folge als Vorlagen für den Ergänzungsbeweis dienen sollen. Nach einer Weile unterbricht die Lehrperson die Schülerarbeit für eine längere öffentliche Phase und zwei Schüler zeichnen zu Beginn je auf einem der Quadrate an der Wandtafel mit Linien die einzelnen Puzzleteile ein. In der Folge führt die Lehrperson das Gespräch zu den rechtwinkligen Dreiecke in diesen Darstellungen. Dabei stellt sie die Frage, wo diese rechtwinkligen Dreiecke zu finden sind. Die Schülerinnen und Schüler äussern sich dazu und bemalen die entsprechenden Seiten der rechtwinkligen Dreiecke (Hypotenuse, Kathete und Kathete) an der Wandtafel mit denselben Farben. Die Lehrperson beschriftet die Seiten jeweils mit Buchstaben und die Klasse nennt die Flächeninhalte der grossen Quadrate und bespricht die Flächeninhalte der Teilquadrate. In der Folge setzen die Schülerinnen und Schüler (weiter im öffentlichen Unterricht) die Flächen der grossen Quadrate gleich ( $2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ). Die Gleichung wird aufgelöst und heraus kommt der Satz des Pythagoras. Die Lehrperson äussert, dass sie nun genug bewiesen hätten und die Puzzleteile werden in den Umschlägen wieder eingessammelt.

Während der Zeit des Einsammelns zeichnet die Lehrperson ein rechtwinkliges Dreieck an die Wandtafel und beschriftet es mit Buchstaben. Eine Schülerin nennt die Formel dazu. Darauf erteilt die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern den Auftrag dreizehn Teilaufgaben eines Arbeitsblattes zu lösen. Bei fünf Teilaufgaben geht es um das Finden der richtigen Formel, was den Schülerinnen und Schüler bereits bekannt ist. Bei einer weiteren Aufgabe mit mehreren Teilaufgaben, geht es darum in zwei grossen Dreiecken verschiedenste rechtwinklige Dreiecke zu entdecken und verschiedene Seiten zu berechnen. Diese Aufgaben sind mehrschrittig und anspruchsvoll. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten darauf in Einzelarbeit.

Nach der Schülerarbeit werden die Ergebnisse der ersten fünf Teilaufgaben und die Anzahl gesuchter rechtwinkliger Dreiecke, in den nächsten Aufgaben genannt, und die Lehrperson gibt die Beendigung dieses Auftrags als Hausaufgaben auf.

### **Lektionsbeschreibung P-1120-3**

Zu Beginn dieser Stunde macht die Klasse einen Rückblick auf die zwei letzten Pythagoraslektionen. Dabei nennen die Schülerinnen und Schüler alle wichtigen und wesentlichen Inhalte. Darauf werden die Ergebnisse und der Lösungsweg der Hausaufgaben besprochen.

Danach zeichnet die Lehrperson ein rechtwinkliges Dreieck an die Wandtafel, bei dem eine Kathete gesucht wird. Die Aufgabe wird öffentlich bearbeitet. Sie ist schwierig, da die Schülerinnen und Schüler bisher keine Katheten berechnet haben. Ein Schüler löst die ganze Aufgabe an der Wandtafel. Das Wurzelziehen bereitet ihm Mühe, deshalb schreibt er  $x = \sqrt{28} \text{ cm}^2$ .

Darauf fragt die Lehrperson nach einer allgemeinen Formel um  $x$  zu berechnen. Die Klasse beteiligt sich rege an der Diskussion über verschiedene Lösungsvarianten und finden zum Schluss die richtige Formel. **(Gemeinsame Lösungssuche in der Klasse, interessantes Beispiel von 24:11- 33:34!!!)**

Darauf erteilt die Lehrperson einen neuen Auftrag, Aufgabe zwei auf dem Aufgabenblatt, das die Schülerinnen und Schüler schon in der letzten Lektion erhalten haben. Die Aufgabe zwei hat fünf Teilaufgaben. Es geht dabei um die Berechnung von Hypotenusen und Katheten. Die Lösungsschritte sind den Schülerinnen und Schülern bekannt, die Aufgabe ist deshalb einfach zu lösen. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten alleine. Nach der Schülerarbeit werden die Ergebnisse korrigiert.

Danach liest eine Schülerin der Klasse eine Aufgabe vor. (Alle Schülerinnen und Schüler haben diese schriftlich vor sich liegen). Es geht dabei um einen Schwimmwettbewerb und die unterschiedliche Längen von Schwimmstrecken, abhängig von der Startnummer der Teilnehmer. Auf dem Aufgabenblatt findet sich eine Skizze, welche die Lehrperson ebenso an die Wandtafel gezeichnet hat. Die Lehrperson sagt darauf, dass das doch ungerecht sei, dass Teilnehmer mit einer höheren Startnummer eine längere Strecke zu schwimmen haben. Darauf diskutiert die Klasse, ob die Teilnehmer mit der Startnummer 700 und 1400 tatsächlich Nachteile haben und wo die Ideallinie der Schwimmer durchgeht. Die Schülerinnen und Schüler kommen mit der Diskussion darauf dass die Schwimmstrecke (Hypotenuse) mit dem Pythagoras berechnet werden kann. Zum Schluss der Stunde gibt die Lehrperson diese Aufgabe als Hausaufgabe auf.

### **Inszemierungsform**

Der Unterricht der drei Lektionen findet als öffentlicher Unterricht oder als Einzelarbeit statt. In der Einzelarbeit haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit gemeinsam erarbeitete Prozeduren nachzuvollziehen und auf eine einfache Art neuen Inhalt handelnd zu bearbeiten. Im öffentlichen Unterricht werden besonders in der dritten Lektion durch geschickte Gesprächsleitung der Lehrperson gemeinsam in der Klasse Lösungswege diskutiert und gefunden.

### **Rolle der Lehrperson**

Neue Lernschritte werden öffentlich eingeführt. Die Lehrperson leitet öffentliche Diskussionen der Klasse äusserst geschickt. Die Klasse hat eine auffallend gute Diskussionskultur und die Schülerinnen und Schüler finden Gefallen daran. In den individuellen Arbeitsphasen unterstützt die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler zum Teil, wo nötig.

### **Rolle der Schülerinnen und Schüler**

Die Schülerinnen und Schüler haben im öffentlichen Unterricht die Möglichkeit Ideen und Interpretationen zu äussern. Durch Diskussionen und Argumentationen der Schülerinnen und Schüler findet die Klasse immer die richtige Lösung. In diesen öffentlichen Phasen leistet die Klasse viele zentrale und wesentliche Beiträge. Die Schülerinnen und Schüler wirken dabei konzentriert und motiviert und beteiligen sich rege. Bei einem Rückblick in der dritten Lektion äussern sie alle wichtigen Lernschritte. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten nun öffentlich oder in Einzelarbeit. In Einzelarbeit geht es v.a. um das Üben von bereits bekannten Prozeduren.